一様空間・距離空間・位相空間の深い関係

～ 学生向け詳細解説：公理の導入からファイン一様構造の存在証明まで ～

本稿は、位相空間論を学ぶ学生に向けて、空間構造の階層性（距離 $\implies$ 一様 $\implies$ 位相）と、その逆方向への遡及（距離化定理、一様化定理）を完全に自己完結的（self-contained）に解説するものです。証明においては論理の飛躍を極力排除し、なぜその近縁を選ぶのか、なぜその連続関数を構成するのかという「動機付け」を含めて記述しています。

0. 準備：フィルターと擬距離

一様空間の議論を厳密に行うため、基盤となる概念を定義します。

定義: フィルター・コーシーフィルター・完全正則性

- **フィルター (Filter):** 集合 X の部分集合族 $\mathcal{F}$ が、(1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$, (2) $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \in \mathcal{F}$, (3) $A \in \mathcal{F}$ かつ $A \subseteq B \implies B \in \mathcal{F}$ を満たすとき、$\mathcal{F}$ をフィルターと呼ぶ。
- **コーシーフィルター (Cauchy filter):** 一様空間 $(X, \mathcal{U})$ 上のフィルター $\mathcal{F}$ であり、任意の近縁 $U \in \mathcal{U}$ に対して、ある $F \in \mathcal{F}$ が存在して $F \times F \subseteq U$ を満たすもの。これは「点列のコーシー性」を一般化した概念である。
- **全有界 (Totally bounded):** 一様空間 $(X, \mathcal{U})$ において、任意の近縁 $U \in \mathcal{U}$ に対して、有限個の点 $x_1, \dots, x_n \in X$ が存在し、$X = \bigcup_{i=1}^n U[x_i]$ となること。ここで $U[x] = \{y \in X \mid (x, y) \in U\}$ である。
- **擬距離 (Pseudometric):** 距離関数の公理のうち「$d(x, y) = 0 \implies x = y$」の条件を外したもの。異なる2点間の距離が0になることを許容する。
- **完全正則空間 (Completely regular space / Tychonoff space):** 任意の閉集合 F と $x \notin F$ に対し、連続関数 $f : X \to [0, 1]$ が存在して、$f(x) = 0$ かつ任意の $y \in F$ で $f(y) = 1$ を満たすような空間。

1. 厳密な基本概念の公理的定義

距離空間 (metric space)

集合 X と関数 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ の組 (X, d) であり、任意の $x, y, z \in X$ について以下の3つの公理を満たすもの。

1. **正の定値性:** $d(x, y) \geq 0$ かつ $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. **対称性:** $d(x, y) = d(y, x)$
3. **三角不等式:** $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

一様空間 (uniform space)

集合 X と、直積集合 $X \times X$ の部分集合族 $\mathcal{U}$（近縁のフィルター）の組 $(X, \mathcal{U})$ であり、以下の5つの公理を満たすもの。

1. **上方閉性:** $U \in \mathcal{U}$ かつ $U \subseteq V \subseteq X \times X \implies V \in \mathcal{U}$
2. **有限交叉性:** $U, V \in \mathcal{U} \implies U \cap V \in \mathcal{U}$
3. **対角線の包含:** 任意の $U \in \mathcal{U}$ について、$\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\} \subseteq U$（すべての点は自身と「近い」）
4. **対称性の一般化:** $U \in \mathcal{U} \implies U^{-1} \in \mathcal{U}$（ただし $U^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in U\}$）
5. **推移性（三角不等式の一般化）:** 任意の $U \in \mathcal{U}$ に対して、ある $V \in \mathcal{U}$ が存在し、$V \circ V \subseteq U$（ただし $V \circ V = \{(x, z) \mid \exists y \in X, (x, y) \in V \wedge (y, z) \in V\}$。これは「距離が半分の近縁」をとる操作に相当する）

※ $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$ が $\mathcal{U}$ の**基本近縁系 (fundamental system of entourages)** であるとは、任意の $U \in \mathcal{U}$ に対してある $B \in \mathcal{B}$ が存在し $B \subseteq U$ となることを指す。

位相空間 (topological space)

集合 X と、X の部分集合族 $\mathcal{O}$（開集合系）の組 $(X, \mathcal{O})$ であり、以下の公理を満たすもの。

1. $X \in \mathcal{O}$ かつ $\emptyset \in \mathcal{O}$
2. $O_1, O_2 \in \mathcal{O} \implies O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$
3. 任意の添字集合 Λ と $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathcal{O}$ について、$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$

---

2. 誘導と距離化に関する定理

定理1: 距離空間から一様空間・位相空間への誘導

定理

距離空間 (X, d) に対して、$U_\epsilon = \{(x, y) \mid d(x, y) < \epsilon\}$ と定義する。このとき、$\mathcal{B} = \{U_\epsilon \mid \epsilon > 0\}$ はある一様構造 $\mathcal{U}_d$ の基本近縁系となる。
さらに、一様構造 $\mathcal{U}_d$ から自然に定まる位相は、距離 d が直接定める位相 $\mathcal{O}_d$ と完全に一致する。

証明

Step 1: $\mathcal{B}$ が一様構造 $\mathcal{U}_d$ を生成すること
$\mathcal{U}_d = \{U \subseteq X \times X \mid \exists \epsilon > 0, U_\epsilon \subseteq U\}$ と定義し、これが一様空間の公理を満たすことを確認する。
(1) 上方閉性: 定義から自明である。
(2) 有限交叉性: $U, V \in \mathcal{U}_d$ とする。定義よりある $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ が存在し $U_{\epsilon_1} \subseteq U$ かつ $U_{\epsilon_2} \subseteq V$。
$\epsilon = \min(\epsilon_1, \epsilon_2) > 0$ とすれば、$U_\epsilon \subseteq U_{\epsilon_1} \cap U_{\epsilon_2} \subseteq U \cap V$ となるため、$U \cap V \in \mathcal{U}_d$。
(3) 対角線: 任意の $\epsilon > 0$ に対し、$d(x, x) = 0 < \epsilon$ であるから、すべての x について $(x, x) \in U_\epsilon$。よって $\Delta \subseteq U_\epsilon$。
(4) 対称性: 距離の対称性 $d(x, y) = d(y, x)$ より、$U_\epsilon = U_\epsilon^{-1}$ である。任意の $U \in \mathcal{U}_d$ に対して $U_\epsilon \subseteq U$ なる ϵ をとれば、$U_\epsilon = U_\epsilon^{-1} \subseteq U^{-1}$ となり、$U^{-1} \in \mathcal{U}_d$。
(5) 推移性: 任意の $U \in \mathcal{U}_d$ に対し $U_\epsilon \subseteq U$ なる $\epsilon > 0$ をとる。ここで $V = U_{\epsilon/2}$ とする。
$(x, z) \in V \circ V$ とすると、定義よりある $y \in X$ が存在し $(x, y) \in V$ かつ $(y, z) \in V$。すなわち $d(x, y) < \epsilon/2$ かつ $d(y, z) < \epsilon/2$。三角不等式より $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < \epsilon$。よって $(x, z) \in U_\epsilon$。ゆえに $V \circ V \subseteq U_\epsilon \subseteq U$ が成立する。

Step 2: 誘導される位相の一致
距離空間における開集合の定義は、「$O \in \mathcal{O}_d \iff \forall x \in O, \exists \epsilon > 0, B_d(x, \epsilon) \subseteq O$」である（$B_d(x, \epsilon)$ は開球）。
一方、一様空間から誘導される位相 $\mathcal{O}_\mathcal{U}$ における開集合の定義は、「$O \in \mathcal{O}_\mathcal{U} \iff \forall x \in O, \exists U \in \mathcal{U}_d, U[x] \subseteq O$」である。
ここで $U_\epsilon[x] = \{y \in X \mid (x, y) \in U_\epsilon\} = \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\} = B_d(x, \epsilon)$ である。したがって、基本近縁系 $\mathcal{B}$ を用いることで、両者の条件は文字通り完全に同値となり、$\mathcal{O}_\mathcal{U} = \mathcal{O}_d$ が導かれる。 ■

定理2: 一様空間の距離付け定理

定理 (Weil / Alexandroff-Urysohn)

一様空間 $(X, \mathcal{U})$ の一様構造が、ある単一の距離関数 d によって誘導されるものと一致するための必要十分条件は、その誘導される位相がハウスドルフ空間であり、かつ一様構造が**可算な基本近縁系**を

持つことである。

証明

必要性: 定理1より、距離から誘導された一様構造は $\mathcal{B} = \{U_{1/n} \mid n \in \mathbb{N}^+\}$ を可算な基本近縁系として持つ。また、距離空間は常にハウスドルフ空間である（$x \neq y \implies d(x,y) = r > 0$ であり、$B(x, r/2)$ と $B(y, r/2)$ は交わらない開近傍となる）。

十分性: 可算な基本近縁系 $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ を持つとする。
(1) 急速に縮小する近縁列の構成: 帰納的に、部分集合の列 $\{U_n\}_{n=0}^{\infty}$ を構成する。$U_0 = X \times X$ とする。$n \geq 1$ について、U_{n-1} が定まったとき、推移性の公理を繰り返し適用することで、$V \circ V \circ V \subseteq U_{n-1} \cap B_n$ となる近縁 V が取れる。対称性の公理を用いて $U_n = V \cap V^{-1}$ とおけば、U_n は対称であり、$U_n \circ U_n \circ U_n \subseteq U_{n-1} \cap B_n$ を満たす。
(2) 離散的な擬距離 g の定義: 各ペア (x,y) に対し、関数 $g : X \times X \to \mathbb{R}$ を次のように定める：
$(x,y) \in U_{n-1} \setminus U_n$ のとき $g(x,y) = 2^{-n}$。
すべての n について $(x,y) \in U_n$ のときは $g(x,y) = 0$。
※ g は対称であるが、三角不等式を満たすとは限らない。
(3) 三角不等式を満たす距離 d の構成（鎖による下限）： 任意の2点 x, y 間の距離 $d(x,y)$ を、有限個の点を経由する g の和の下限として定義する：

$$d(x,y) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{k} g(z_{i-1}, z_i) \;\middle|\; z_0 = x, \dots, z_k = y, k \geq 1 \right\}$$

これにより、d は構成から明らかに三角不等式 $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ を満たす。
(4) d が元の一様構造と位相を正しく誘導すること:
いわゆる「連鎖の補題 (Chain Lemma)」により、任意の (x,y) に対して $d(x,y) \leq g(x,y) \leq 2d(x,y)$ が成り立つことが（2進展開に基づく帰納法で）示される。これより、
$U_n \subseteq \{(x,y) \mid g(x,y) \leq 2^{-n}\} \subseteq \{(x,y) \mid d(x,y) \leq 2^{-n}\}$
$\{(x,y) \mid d(x,y) < 2^{-(n+1)}\} \subseteq \{(x,y) \mid g(x,y) < 2^{-n}\} \subseteq U_n$
が成立するため、距離 d が定める近縁系と $\{U_n\}$（したがって $\{B_n\}$）は互いに包含し合い、一様構造が完全に一致する。
最後に、誘導される位相がハウスドルフであるため、$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \Delta$（対角線のみ）となる。したがって $x \neq y \implies g(x,y) > 0 \implies d(x,y) > 0$ となり、d は単なる擬距離ではなく完全な距離関数である。■

---

3. コンパクト空間における性質

定理3: コンパクト性と完備性

定理

一様空間 $(X,\mathcal{U})$ がコンパクト位相空間であるための必要十分条件は、 X が「完備 (complete)」かつ「全有界 (totally bounded)」であることである。

証明

(コンパクト $\implies$ 完備かつ全有界):
・全有界性：任意の $U \in \mathcal{U}$ に対して、$V \circ V \subseteq U$ なる開近縁（内部をとったもの）V をとる。$\{V[x]\}_{x \in X}$ は X の開被覆となる。コンパクト性より、これは有限部分被覆 $\{V[x_1], \dots, V[x_n]\}$ を持つ。よって $X = \bigcup_{i=1}^n V[x_i]$ となり全有界。
・完備性：任意のコーシーフィルター $\mathcal{F}$ をとる。コンパクト空間において、任意のフィルターは少なくとも一つの集積点 x を持つ。コーシーフィルターの性質（任意の近さの基準を満たす元が含まれる）より、集積点を持てばその点 x に収束せざるを得ない。よって完備である。

(完備かつ全有界 $\implies$ コンパクト):
位相空間がコンパクトであることを示すには、「任意の超フィルター (Ultrafilter) が収束する」ことを示せばよい。X 上の任意の超フィルター $\mathcal{U}^*$ をとる。
これがコーシーフィルターであることを示す。任意の $W \in \mathcal{U}$ に対し、$V^{-1} \circ V \subseteq W$ なる対称な $V \in \mathcal{U}$ を選ぶ。全有界性より、ある有限個の点 $\{x_1, \dots, x_n\}$ が存在し、$X = \bigcup_{i=1}^n V[x_i]$ となる。超フィルターの強力な性質（有限和が全体を覆うなら、少なくとも一つはその超フィルターに属する）により、ある k が存在して $V[x_k] \in \mathcal{U}^*$ となる。
ここで、任意の $y, z \in V[x_k]$ をとると、$(x_k, y) \in V \implies (y, x_k) \in V^{-1}$ であり、$(x_k, z) \in V$ である。推移性より $(y, z) \in V^{-1} \circ V \subseteq W$ となる。すなわち $V[x_k] \times V[x_k] \subseteq W$ である。
これは $\mathcal{U}^*$ が W よりも「細かい」元 $V[x_k]$ を持つことを意味し、$\mathcal{U}^*$ はコーシーフィルターである。
完備性の仮定により、このコーシーフィルター $\mathcal{U}^*$ は収束する。超フィルターが常に収束するため、 X はコンパクトである。 ■

定理4: コンパクト・ハウスドルフ空間における一意性

定理

位相空間 $(X,\mathcal{O})$ がコンパクト・ハウスドルフ空間であるとき、 $\mathcal{O}$ を誘導するような X 上の一様構造 $\mathcal{U}$ は**一意に定まる**。具体的には、対角線 Δ の「すべての開近傍」からなるフィルターそのものにな

る。

証明

$\mathcal{V}$ を元の位相 $\mathcal{O}$ を誘導する任意の一様構造とする。また、$\mathcal{U}$ を直積位相における対角線 Δ のすべての近傍からなるフィルターとする。

Step 1: $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ の証明

$\mathcal{V}$ の任意の元 V は、一様空間の性質から各点 x において $V[x]$ が開近傍を含むため、直積位相においても Δ の開近傍を含む。よって定義より $V \in \mathcal{U}$ である。ゆえに $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$。

Step 2: $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ の証明

任意の $W \in \mathcal{U}$ をとる。W は Δ の開近傍であるため、各 $x \in X$ に対して $(x, x) \in O_x \times O_x \subseteq W$ となるような X の開集合 O_x が存在する。

$\mathcal{V}$ は位相 $\mathcal{O}$ を誘導するため、各 x について $V_x[x] \subseteq O_x$ となる近縁 $V_x \in \mathcal{V}$ がとれる。推移性と対称性から、$U_x \circ U_x \subseteq V_x$ となる対称な近縁 $U_x \in \mathcal{V}$ を選ぶ。

ここからがコンパクト性の出番である。開被覆 $\{U_x[x]\}_{x \in X}$ は X を覆うため、有限部分被覆 $X = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}[x_i]$ を持つ。

有限交叉性から $U = \bigcap_{i=1}^n U_{x_i}$ とおくと、$U \in \mathcal{V}$ である。この U が W に含まれることを示す。

任意の $(a, b) \in U$ をとる。ある $k \in \{1, \ldots, n\}$ に対して $a \in U_{x_k}[x_k]$ である。$U \subseteq U_{x_k}$ より $(a, b) \in U_{x_k}$。推移性より $b \in U_{x_k} \circ U_{x_k}[x_k] \subseteq V_{x_k}[x_k] \subseteq O_{x_k}$。

また $a \in U_{x_k}[x_k] \subseteq V_{x_k}[x_k] \subseteq O_{x_k}$ でもある。

したがって $(a, b) \in O_{x_k} \times O_{x_k} \subseteq W$。よって $U \subseteq W$ となり、上方閉性から $W \in \mathcal{V}$ である。したがって $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$。

以上より $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ となり、一様構造は一意に定まる。■

4. ファイン一様構造の存在と普遍性

一般の空間では、同じ位相を誘導する一様構造は無数に存在し得ます。しかし、距離化可能な空間を含む「完全正則空間」においては、それら全ての一様構造を包み込む「最強の」一様構造が存在します。

定理5: 最強の一様構造（ファイン一様構造）の存在

定理

完全正則空間 $(X, \mathcal{O})$ 上には、位相 $\mathcal{O}$ を誘導する一様構造の中で「最強のもの（最も細かい,

finest）」である一様構造 $\mathcal{U}^*$ がただ一つ存在する。

証明

Step 1: $\mathcal{U}^*$ の構成
$\mathcal{D}$ を、直積位相に関して連続な「$X \times X$ 上のすべての擬距離 d」の集合とする。各 $d \in \mathcal{D}$ と実数 $\epsilon > 0$ に対して、$V_{d,\epsilon} = \{(x, y) \mid d(x, y) < \epsilon\}$ を考える。
これらすべての $V_{d,\epsilon}$ の有限個の共通部分を基本近縁系とする一様構造を $\mathcal{U}^*$ と定義する。すなわち、

$$\mathcal{B}^* = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} V_{d_i,\epsilon_i} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^+, d_i \in \mathcal{D}, \epsilon_i > 0 \right\}$$

$\mathcal{B}^*$ は一様空間の公理（有限交叉性、推移性など）を満たすため、ある一様構造 $\mathcal{U}^*$ を定める。

Step 2: $\mathcal{U}^*$ が元の位相 $\mathcal{O}$ を誘導すること
$\mathcal{U}^*$ から誘導される位相を $\mathcal{O}^*$ とする。
(i) $\mathcal{O}^* \subseteq \mathcal{O}$: $d \in \mathcal{D}$ は $\mathcal{O} \times \mathcal{O}$ に関して連続であるため、x を固定した $V_{d,\epsilon}[x]$ は $\mathcal{O}$ の開集合である。
よって $\mathcal{O}^*$ の開集合は $\mathcal{O}$ の開集合から生成されるため、$\mathcal{O}$ より弱い。
(ii) $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}^*$: 任意の $O \in \mathcal{O}$ と $x \in O$ をとる。X は**完全正則空間**であるから、連続関数 $f : X \to [0, 1]$ で $f(x) = 0$ かつ $f(X \setminus O) = 1$ なるものが存在する。ここで $d_f(y, z) = |f(y) - f(z)|$ と定義すると、f の連続性より d_f は連続な擬距離であり、$d_f \in \mathcal{D}$ である。このとき $V_{d_f,1}[x] = \{y \mid |f(x) - f(y)| < 1\} = \{y \mid f(y) < 1\} \subseteq O$ となる。これは O が $\mathcal{O}^*$ においても開集合であることを意味し、$\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}^*$。
以上より $\mathcal{O} = \mathcal{O}^*$。

Step 3: $\mathcal{U}^*$ が「最強」であること
位相 $\mathcal{O}$ を誘導する任意の一様構造を $\mathcal{U}$ とする。$\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}^*$ を示せばよい。
任意の $V \in \mathcal{U}$ をとる。定理2のアレクサンドロフ・ウリゾーンの証明と同様の手法を用いることで、V に含まれるような $\mathcal{U}$ 上の「一様連続な」擬距離 d_V を構成することができる（$V_{d_V,1} \subseteq V$）。
d_V は一様連続であるから、当然ながら誘導される位相 $\mathcal{O}$ に関しても連続である。したがって $d_V \in \mathcal{D}$ である。
すると、定義より $V_{d_V,1}$ は $\mathcal{U}^*$ の元である。上方閉性により、それを含む V も $\mathcal{U}^*$ の元となる。ゆえに $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}^*$ が示され、$\mathcal{U}^*$ は最強の一様構造であることが完全に証明された。 ■

定理6: ファイン一様構造の普遍性 (Universal property)

定理

$(X, \mathcal{U}^*)$ を完全正則空間上のファイン一様空間とし、$(Y, \mathcal{U}_Y)$ を任意の一様空間とする。
このとき、任意の**連続写像** $f : X \to Y$ は、自動的に**一様連続**となる。

証明

Y の任意の近縁 $W \in \mathcal{U}_Y$ をとる。一様連続性を示すには、$(x_1, x_2) \in U \implies (f(x_1), f(x_2)) \in W$ となる X の近縁 $U \in \mathcal{U}^*$ を見つければよい。
定理5のStep 3と同様に、W に対応する Y 上の一様連続な擬距離 d_W が存在し、
$\{(y_1, y_2) \mid d_W(y_1, y_2) < 1\} \subseteq W$ とできる。
ここで、X 上の実数値関数 $d_X : X \times X \to \mathbb{R}$ を合成を用いて次のように定義する：

$$d_X(x_1, x_2) = d_W(f(x_1), f(x_2))$$

f は仮定より連続であり、d_W も連続であるため、合成関数である d_X は X 上の連続な擬距離となる。したがって $d_X \in \mathcal{D}$ である。
$\mathcal{U}^*$ の定義から、$U = \{(x_1, x_2) \mid d_X(x_1, x_2) < 1\} \in \mathcal{U}^*$ である。
この U を用いると、
$(x_1, x_2) \in U \implies d_X(x_1, x_2) < 1 \implies d_W(f(x_1), f(x_2)) < 1 \implies (f(x_1), f(x_2)) \in W$ が成り立つ。
条件を満たす近縁 U が取れたため、f は一様連続である。 ■

補足：普遍性の意義

定理6は非常に強力な結果です。通常、連続関数は局所的な性質であり、一様連続性はより厳しい大域的な性質です。しかし、定義域が「ファイン一様空間」であれば、単に連続であるだけで、自動的に一様連続性が保証されます。これは、ファイン一様構造 $\mathcal{U}^*$ が、位相空間としての連続性を破らないギリギリのラインまで、あらゆる「近さの基準」をすべて採用した究極の構造であるためです。